

华东师范大学物理生化菁英班高等数学 A 期末考试试卷 (A)

2023—2024 学年第一学期

课程名称: 高等数学 A

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: _____

课程性质: 公共必修

一	二	总分	阅卷人

.....
本次考试共两大题, 十小题, 每题 10 分, 请写出详细解题过程。

一、计算下列各题 (满分 80 分)

1. 按定义证明极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{5}{3}$.

2. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 \left[\frac{100}{n^3} - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(n+k)^3} \right]$.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) \ln(3+t^2) dt}{\sin^2 x}$.

4. 设 $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 6x + 8}$, 求 $f^{(n)}(0)$

5. 求定积分 $I = \int_0^3 \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{6-x} + \sqrt{3+x}} dx$.

6. 求反常积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$.

7. (1) 求直线 $L: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{5}$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面方程;

(2) 求该曲面介于平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间所围成的体积.

8. 已知 $f(x)$ 的原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(2x) dx$.

二、证明题（满分 20 分）

9. 已知 $f(x)$ 二阶可导, $f''(x) \geq 0$, 求证: $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

10. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 中可导, 且 $f(0)=1, f(1)=\frac{1}{2}$. 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) + f^2(\xi) = 0$.