

华东师范大学物理生化菁英班高等数学 A 期末考试试卷 (A)

2023—2024 学年第一学期

课程名称: 高等数学 A

学生姓名: \_\_\_\_\_

学 号: \_\_\_\_\_

专 业: \_\_\_\_\_

年级/班级: \_\_\_\_\_

课程性质: 公共必修

一	二	总分	阅卷人

.....  
本次考试共两大题, 十小题, 每题 10 分, 请写出详细解题过程。

一、计算下列各题 (满分 80 分)

1. 按定义证明极限  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{5}{3}$ .

2. 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 \left[ \frac{100}{n^3} - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(n+k)^3} \right]$ .

---

3. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) \ln(3+t^2) dt}{\sin^2 x}$ .

4. 设  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 6x + 8}$ , 求  $f^{(n)}(0)$

5. 求定积分  $I = \int_0^3 \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{6-x} + \sqrt{3+x}} dx$ .

---

6. 求反常积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$ .

7. (1) 求直线  $L: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{5}$  绕  $z$  轴旋转一周所形成的曲面方程;

(2) 求该曲面介于平面  $z=0$  和  $z=1$  之间所围成的体积.

8. 已知  $f(x)$  的原函数为  $\frac{\sin x}{x}$ , 求  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(2x) dx$ .

---

二、证明题（满分 20 分）

9. 已知  $f(x)$  二阶可导,  $f''(x) \geq 0$ , 求证:  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

10. 已知函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  中可导, 且  $f(0)=1, f(1)=\frac{1}{2}$ . 证明: 存在  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $f'(\xi) + f^2(\xi) = 0$ .