华东师范大学期末试卷(A)

2023–2024学年第一学期

课程名称: 线性代数A　　　　　　课程性质: 学科基础

学生姓名: ________________　　　学　　号: ________________

专　　业: ________________　　　年　　级: ________________

一	二	三	四	五	六	七	八	总 分	阅卷人签名

一、(本题共32分, 每题各4分)

1. 设$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\0\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\2\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\6\\a\end{bmatrix}$。若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，则$a=$(　　　　)

   A. 2　　　　B.4　　　　C. 6　　　　D. 8

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三维向量空间$\mathbb{R}^3$的一组基，则由基$\alpha_1,\frac{1}{3}\alpha_2,\frac{1}{2}\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为(　　　　)

   A. $\begin{bmatrix}1&0&1\\3&3&0\\0&2&2\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}1&3&0\\0&3&2\\1&0&2\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

3. 设$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$，则下列矩阵中与$A$合同的是(　　　　)

   A. $\begin{bmatrix}-2&1\\1&-2\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$

4. 设矩阵$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则$A^3$的秩为(　　　　)

   A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 都是n维列向量，A是$m\times n$矩阵，则命题(　　　　) 成立

   A. 若$A\alpha_1,A\alpha_2,\dots,A\alpha_s$线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性相关

   B. 若$A\alpha_1,A\alpha_2,\dots,A\alpha_s$线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性无关

   C. 若$A\alpha_1,A\alpha_2,\dots,A\alpha_s$线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性相关

   D. 若$A\alpha_1,A\alpha_2,\dots,A\alpha_s$线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$线性无关

6. 设$A_{m\times n}$，$B_{n\times p}$ 为两个矩阵，满足$AB=0$，则下列说法中**不正确**的是(　　　　)

   A. 若$A\neq 0$，则$B=0$　　B. 若$\operatorname{rank}(A)=n$，则B的行向量线性相关

   C. $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\le n$　　D. 若$\operatorname{rank}(B)=n$，则A的列向量线性相关

7. 设4阶方阵A的秩等于2，并设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是非齐次方程组$Ax=b$的三个线性无关的解。则下列四个答案中是$Ax=b$的通解的为(　　　　)

   A. $(1-c_1-c_2)\,\alpha_1+c_1\alpha_2+c_2\alpha_3$，$c_1,c_2\in\mathbb{R}$　　B. $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3$，$c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$

   C. $(1-c_1-c_2)\,\alpha_1-c_1\alpha_2-c_2\alpha_3$，$c_1,c_2\in\mathbb{R}$　　D. $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}+c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，$c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$

8. 设3阶方阵A的特征多项式为$\lambda^3+a_1\lambda+a_0$，其中a_1,a_0是数。下列四组值中**不可能是** A的全部三个特征值的是(　　　　)

A. $-1,-2,3$　　　　B. $1,2,-3$　　　　C. $-2,1,1$　　　　D. $1,2,3$

二、(本题12分) 求解下列线性方程组，其中b为参数。

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & & =2b-2 \\ x_1 & & +x_3 & -x_4 & =b \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & =3b-2 \\ 3x_1 & +2x_2 & +5x_3 & -x_4 & =6b-5 \end{array}\right.$$ 。

三、(本题10分) 设$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -3\end{bmatrix}$。

(1) 说明A相似于对角阵，并求可逆阵P，使$P^{-1}AP$为对角阵；

(2) 对正整数n，求A^n。

四、(本题12分) 将二次型$x_1^2-4x_1x_2-8x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3-34x_3^2$化成标准型，并指出该二次型的正、负惯性指数和符号差。

五、(本题10分) 求n阶行列式$|A|$的值。

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-2 & n-2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \end{vmatrix}$$

六、(本题14分) 设矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & a \end{bmatrix}$有特征向量$\begin{bmatrix} k-1 \\ -\dfrac{3}{2} \\ k \end{bmatrix}$。

1. 求k和a的值；
2. 验证A只有一个实特征值。(提示：由上一小题，可以得到A 的特征多项式的一个一次因式)

七、(本题6分) 设A为n阶正定阵，B为n阶实阵，同时$C = AB + B^T A$是正定阵。

1. 证明B的实特征值都为正数；
2. 证明$|B| > 0$。

八、(本题4分) 以$\mathbb{R}^3$记3维实列向量构成的标准欧氏空间。

1. 如果$v \in \mathbb{R}^3$，且$\|v\| = 1$，验证矩阵$A = E_3 - 2vv^T$是实对称的正交矩阵，且v、以及与v正交的非零向量都是A的特征向量；

2. 如果A是3阶实对称的正交矩阵，且A的三个特征值为$-1,1,1$。证明存在满足条件$\|v\| = 1$的向量$v \in \mathbb{R}^3$，使得$A = E_3 - 2vv^T$。