

华东师范大学期末试卷 (A)

2010 —2011 学年第 一 学期

课程名称： 高等数学 A

学生姓名： _____ 学 号： _____

专 业： _____ 年级/班级： 2010 级

课程性质： 公共必修.

一	二	三	四	五	六	总分	阅卷人签名

一. 填空题 (20 分, 每题 4 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x \cos t^2 dt}{x^5} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} 的模分别为 1 和 3, 它们之间的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - \sqrt{1-x}$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

二. 计算题 (45 分, 前 3 题每题 5 分, 后 5 题每题 6 分)

1. 设 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln [f(1)f(2)\cdots f(n)]$.

2. 求曲线 $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 在 $x = 1$ 处的曲率半径.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ a + bx, & x \geq 0 \end{cases}$, 试确定常数 a, b 使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

4. 计算 $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$.

5. 计算 $\int e^x \cos 2x dx$.

6. 计算 $\int \frac{\sin 2x}{1 + e^{\sin^2 x}} dx$.

7. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$.

8. 求曲线 $y = \ln \sin x$ 对应于 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 的一段弧的弧长.

三. 综合题 (35 分)

1. 求经过两点 $P_1(1,2,3)$ 和 $P_2(3,2,1)$ 且与平面 $x + y + z - 1 = 0$ 垂直的平面方程 (7 分)。

2. 设 $f''(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $f'(0) = 2$, $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \cos x \, dx = \pi$, 求 $f'(\pi)$ (8分)。

3. 设平面图形 D 由曲线 $y = \ln x$, 及该曲线过原点的切线和 x 轴围成。

(1) 画出 D 的草图, 并求其面积 (8分); (2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得的旋转体的体积 (4分)。

4. (8分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, $f(0)=0$, $0 < f'(x) \leq 1$ 。证明

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x)dx。$$