华东师范大学期末试卷（A）

2023 − 2024 学年第1 学期

课程名称：线性代数（菁英班）
学生姓名：____________ 学　　号：____________
专　　业：____________ 年级/班级：____________

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、 单选题（20分，每题4分）

(1) 设$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ 1 & 1 & x+1 \\ 2 & x+1 & -4 \end{vmatrix}$，则下列值中**不是**$f(x)=0$的解的是(　).

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

(2) 设A、B、C为n级方阵，则下列命题中正确的是(　).

A. 若$AB=0$，则$A=0$或$B=0$　　B. 若A可逆，则由$AB=AC$可推出$B=C$

C. 若A、B 可逆，则$A+B$也可逆　　D.对任意的正整数k，$(AB)^k=A^kB^k$成立

(3) 设线性映射$\varphi: V\to U$在给定基下的表示矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & -7 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$，则

$\dim\ker\varphi=$(　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(4) 下列的三级方阵中，特征多项式为$\lambda^3-5\lambda+1$的是(　).

A. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(5) 设A、B是n级可逆复方阵，则以下关于转置$(\ )'$、共轭$\overline{(\ )}$、以及伴随$(\ )^*$的结论中**不正确**的是(　).

A. $(AB)'=B'A'$　　B. $(AB)^*=B^*A^*$

C. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$　　D. $\overline{(AB)}=\overline{BA}$

二、 填空题（20分，每题4分）

(1) 方程$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$ 的解是$(x,y)=$ ________。

(2) 已知$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，则$A$的伴随矩阵$A^*=$ ____________。

(3) 设三级方阵A的特征值为$1,-1,2$，则矩阵A^2-2A^{-1}的特征多项式为________。

(4) 已知向量组$\{\alpha_1=(0,1,1),\alpha_2=(1,2,1),\alpha_3=(1,0,-1)\}$与向量组$\{\beta_1=(1,1,0),\beta_2=(1,1,1),\beta_3=(2,a,0)\}$的秩相同，则$a=$ ________。

(5) 设$(1,1,-2)$，$(2,-1,a)$，$(2,6,b)$是标准欧氏空间$\mathbb{R}^3$中的正交向量组，则$(a,b)=$ ________。

三、（20分）设实方阵$A=\begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 2 & -a & 6 \\ 2-2a & 0 & a \end{pmatrix}$满足$|A|=1$并且伴随阵$A^*$有一个特征值$\lambda_0$及对应的特征向量$(-1,2,1)'$。

(1) 求a,λ_0的值；

(2) 求A的另外两个特征值的特征向量。

四、（10分）求解下列线性方程组，其中a,b为参数：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - (a+7)x_4 = b \\ x_2 + (a+8)x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 2b+1 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 2b \end{cases}。$$

五、（10分）记$\mathbb{R}^3$是3维列向量空间，$e_1=(1,0,0)'$，$e_2=(0,1,0)'$，$e_3=(0,0,1)'$是其标准基，$f_1=(1,1,1)'$，$f_2=(0,1,1)'$，$f_3=(0,0,1)'$是其上三个向量。设$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$是线性变换，满足$\varphi(f_1)=(1,2,3)'$、$\varphi(f_2)=(1,0,3)'$、$\varphi(f_3)=(-2,2,-6)'$。

(1) 求φ在$\mathbb{R}^3$的基e_1，e_2，e_3下的表示矩阵；

(2) 分别求出φ的像空间的维数，和φ的核空间的一组基。

六、（10分）求正交矩阵Q，使二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_3x_2$在变换$x=Qy$下变为对角型，并给出$f(x_1,x_2,x_3)$的正负惯性指数。

七、（10分）设 A 为实对称矩阵，并且所有与 A 乘法可交换的矩阵都可对角化。

(1) 证明A有n个互不相同的特征值；

(2) 所有与A乘法可交换的实方阵一定是对称阵。